PERSAMAAN DIFERENSIAL

Pertemuan I,II

Sidiq Aulia Rahman

Definisi 1.1

Persamaan Diferensial (PD) adalah suatu persamaan yang memuat turunan **fungsi dari satu atau lebih peubah tak bebas** terhadap **satu atau lebih peubah bebas**.

Contoh 1

Manakah yang termasuk persamaan diferensial dan sebutkan jenis peubahnya

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + x - \cos t = 0$
3. $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = st$
4. $\frac{d(uv)}{dx} = \frac{u\,dv}{dx} + \frac{v\,du}{dx}$
5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b, b\ fungsi\ dari\ x, y, t$

Jawaban:

1. PD dengan peubah tak bebas y dan peubah bebas x
2. PD dengan peubah tak bebas x dan peubah bebas t
3. PD dengan peubah tak bebas v dan peubah bebas s dan t
4. Bukan PD
5. PD dengan peubah tak bebas u dan peubah bebas x, y, t.

Contoh 1

Manakah yang termasuk persamaan diferensial dan sebutkan jenis peubahnya

6. $\frac{dx}{dt} = x - t$
7. $\frac{d^2u}{dt^2} + u^2t = 0$
8. $(3x + 2t + 4)dx + (1 - 3t + x)dt = 0$
9. $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$
10. $\cos x \frac{du}{dx} + \sin x + 4 = 0$

Jawaban:

6. PD dengan peubah tak bebas x dan peubah bebas t
7. PD dengan peubah tak bebas u dan peubah bebas t
8. PD dengan peubah tak bebas x atau t dan peubah bebas t atau x
9. PD dengan peubah tak bebas v dan u dan peubah bebas x dan t
10. PD dengan peubah tak bebas u dan peubah bebas x

Klasifikasi Persamaan Diferensial

- Untuk melihat persamaan diferensial dari segi **banyaknya peubah**, dibagi menjadi dua bagian, yaitu **persamaan diferensial biasa**, dan **persamaan diferensial parsial**.

Definisi 1.2

Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas **<u>teradap satu peubah bebas</u>**.

- Berdasarkan definisi ini, kita tinjau kembali PD yang telah dikemuakakan pada contoh diatas yang merupakan PD biasa adalah no: 1, 2, 6, 7, 8, 10.

Contoh :

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = c$$

PD Biasa dengan peubah tak bebas u dan v dan peubah bebasnya x

Definisi 1.3

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih bepubah tak bebas <u>terhadap dua atau lebih peubah bebas.</u>

Pada contoh sebelumnya, kita peroleh yang merupakan PD parsial adalah no 3, 5, dan 9

Contoh

tentukan peubah tak bebas dan peubah bebas

a. $\dfrac{\partial v}{\partial s} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = v + st$

b. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

c. $(x^2 + y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$

a. PD parsial dengan peubah tak bebas v dan peubah bebas s dan t
b. PD parsial dengan peubah tak bebas v dan peubah bebas x dan y
c. PD parsial dengan peubah tak bebas z dan peubah bebas x dan y

Definisi 1.4

- Orde suatu Persamaan Diferensial adalah tingkat turunan yang paling tinggi dari turunan yang termuat dalam persamaan diferensial.

Contoh
tentukan ordo dari setiap PD

1. $y'' + xy(y')^3 = 0,$
2. $3y''' + 4xy'' + 3y' + 6xy = 0,$
3. $(y'')^2 + 2y' - 3y^3 = 0,$
4. $y'' + x^2y = 0,$
5. $y' + x^2y^2 = 0,$
6. $(3x - 2y + 4)dx + (2x + y - 3)dy = 0,$

Jawab :

2, 3,2, 2, 1, 1

Derajat atau pangkat suatu persamaan diferensial yang berbentuk polinom dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya adalah derajat/ pangkat tertinggi polinom tersebut

1. $y'' + xy(y')^3 = 0,$ merupakan PD berderajat 4,
2. $y^{iv} + 5y'' + 3y = \sin x,$ merupakan PD derajat 1
3. $y^2y' + xy^2 = 0;$ merupakan PD derajat 3
4. $y' + xy^2 = 0,$ merupakan PD derajat 2
5. $y' = \frac{(x^2+x)}{y},$ merupakan PD berderajat 2
6. $(3x - y)y' = 3x - y - 4,$ merupakan PD berdarajat 2

Definisi 1.5

- Persamaan diferensial biasa linier orde n adalah persamaan diferensial berpangkat satu dalam perubah tak bebas dan turunan-turunannya.
- Berdasarkan definisi ini, maka kita dapat menuliskan bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linier ordo n dalam bentuk

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x);\ dimana\ a_n(x) \neq 0$$

PDB disebut linier bila memenuhi kriteria berikut:

1. Tidak terdapat perkalian antara peubah tak bebas dan turunannya
2. Tidak terdapat fungsi transeden dalam peubah tak bebas
3. Peubah tak bebas dan turunannya paling besar berpangkat Satu
4. masing-masing fungsi kontinu dalam x pada satu interval

Contoh PDB linier atau tak linier

1. $y'' + 5y' + 6y^2 = 0,$
2. $y'' + 6yy' + 4xy = 0,$
3. $y^{iv} + x^2y'' + xy' = x,$
4. $(x^2 + 1)y'' + (x - 1)y' + 2y = 0,$
5. $x(y'')^2 + x^2y' - 3y = 0,$
6. $sinx\, y' + x \sin y = 4x,$
7. $\cos x\, y'' + \sin x\, y' - 4 \tan x\, y = 0,$
8. $\cos y\, y'' + xt = 0,$
9. $y'' - 2xy' + 3siny = 0,$

jawaban

1. merupakan PDB tak linier, karena tidak memenuhi syarat (iii)
2. merupakan PDB tak linier karena tidak memenuhi syarat (i)
3. merupakan PDB linier
4. merupakan PDB linier
5. merupakan PDB tak linier karena tidak memenuhi syarat (iii)
6. merupakan PDB tak linier, karena tidak memenuhi syarat (ii)
7. merupakan PDB linier
8. merupakan PDB tak linier, karena tidak memenuhi syarat (i), dan (ii)
9. merupakan PDB tak linier karena tidak memenuhi syarat (ii)

Kalasifikasi tiap PD berikut, a) biasa atau parsial, b) linear atau tak linear, c) tentukan orde/ tingkat, d) tentukan pangkat/ derajat

- $y''' + x^2 y'' - xy' = 0$
- $y'' + x^4 y(y'')^2 - x = 0$
- $\frac{d^5 n}{dt^5} + \left[\frac{d^3 n}{dt^3}\right]^2 - 4\frac{dn}{dt} - 5 = 0$

Tugas 1
Kalasifikasi tiap PD berikut,

- a) biasa atau parsial,
- b) linear atau tak linear
- c) Nyatakan variabel bebas dan tak bebasnya
- d) tentukan orde/ tingkat,
- e) tentukan pangkat/ derajat

1. $ty' - y = 2t^4$

2. $y' - t^2 y = 3y^2$

3. $ty' - y = (ty)^{\frac{3}{2}}$

4. $2x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0$

5. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta) = \cos^2(\theta)$

6. $\dfrac{dx}{dt} + x = \sin(2t)$

7. $y'' - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$

8. $\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{y}{t} = \dfrac{t}{y^3}$

9. $5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 9x = 2\cos(3t)$

10. $\left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2 = ap(b-p)$

11. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} + xt = 0$

12. $2y'' + (y')^2 + 2y^2 = 0$

13. $y^{(4)} - y = t - 1$

14. $\dfrac{\partial y}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial t} + y^2 = 0$

15. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(1+3y)}{y(2-3x)}$

Solusi Persamaan Diferensial (Penyelesaian PD)

Pertemuan III

Sidiq Aulia Rahman

Pengertian

Selesaian PD adalah suatu fungsi atau keluarga fungsi yang memenuhi persamaan.

Selesaian umum PD adalah suatu keluarga fungsi yagn memuat beberapa parameter dan memenuhi persamaannya.

Selesaian Khusus PD adalah suatu fungsi yang merupakan anggota dari keluarga fungsi selsesaian umumnya. (mengganti paremeter pada selesaian umum dengan suatu konstanta)

Contoh

- fungsi y $= e^{2x}$ adalah selesaian dari PD $y' - 2y = 0$, karena $y' = 2e^{2x}$ sehingga $2e^{2x} - 2(e^{2x}) = 0$
- fungsi $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ adalah selesaian umum PD $y'' + y = 0$ (buktikan!)
- fungsi $y = 2 \sin x$ adalah selesaian khusus PD $y'' + y = 0$, karena keluarga fungsi $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ dengan $c_1 = 2$ dan $c_2 = 0$

Latihan 1

- Buktikan $f(x) = 4\sin x + 6\cos x$

merupakan solusi dari persamaan diferensial umum $y'' + y = 0$

Latihan 2

- Apakah $x^2 + y^2 = 36$ merupakan solusi persamaan diferensial $x + y\,y' = 0$

Silahkan turunkan atau ubah bentuk menjadi

$y = \pm\sqrt{(36 - x^2)}$

Latihan 3

- Apakah $x^2 + y^2 + 25 = 0$ merupakan solusi persamaan diferensial $x + y\, y' = 0$

Latihan 4

- Tentukan solusi khusus PD

$$y'' = \sin x\,, y(0) = 1, y'(\pi) = 2$$

Latihan 5

- Tentukan solusi umum PD

$$y' = e^{3x} + \sin x$$

Persamaan Diferensial Peubah Terpisah

Pertemuan IV-V

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde 1 akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linear,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

Definisi

- PD orde satu $y' = f(x,y)$ disebut peubah terpisah jika f dapat ditulis dalam bentuk $f(x,y) = \frac{g(x)}{h(x)}$, dimana g dan h fungsi dari satu peubah

Dari definisi PD peubah terpisah jika PD tersebut dapat ditulis dalam bentuk $h(x)dy = g(x)dx$

Pemisalan

- Pandang PD:

$$(x^2 - x)y^2dx + x(y^2 - y^3)dy = 0$$

Bentuk PD ini dapat disederhanakan mejadi

$$(x - 1)dx + (1 - y)dy = 0$$

Jadi PD diatas merupakan PD peubah terpisah

Untuk mencari solusi persamaan, silahkan intergralkan kedua ruas dari persamaan

$$H(y) = G(x) \leftrightarrow \int h(y)dy = \int g(x)dx$$

Contoh 1

- Cari selesaian umum PD :

$$y' - 2xy = 0$$

Ditulis: $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$ atau $\frac{dy}{y} - 2xdx = 0$

Sehingga $\int \frac{dy}{y} - \int 2xdx = \mathrm{c}$

$$\leftrightarrow ln|y| = x^2 + c$$

$$\leftrightarrow \quad |y| = e^{x^2+c}$$

$$\leftrightarrow y = e^c . e^{x^2}$$

$$\leftrightarrow y = c . e^{x^2}$$

Contoh 2

- Cari selesaian umum PD :

$$3xyy' + y^2 + 1 = 0$$

Tulis: $3xy\,dy + \ (y^2 + 1)dx = 0$

Kelompokan $\frac{3y}{(y^2+1)}dy + \frac{1}{x}\ dx = 0$

$$\leftrightarrow \int \frac{3y}{(y^2 + 1)}dy + \int \frac{1}{x}\ dx = c$$

$$\leftrightarrow\ \frac{3}{2}ln|y^2 + 1| + ln|x| = ln|c|$$

$$\leftrightarrow (y^2 + 1)^{\frac{3}{2}}.x = c$$

Contoh 3

- tentukan selesaian khusus PD

$$y' = \frac{x}{5y^4 + 3}, y(0) = 1$$

Ditulis: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{5y^4+3}$

$$\leftrightarrow (5y^4 + 3)dy = x\,dx$$

$$\leftrightarrow (5y^4 + 3)dy - x\,dx = 0$$

$$\leftrightarrow \int (5y^4 + 3)dy - \int x\,dx = c$$

$$\leftrightarrow\ y^5 + 3y - \frac{1}{2}x^2 = c$$

Subtitusi $y(0) = 1$ didapat $c = 4$

Jadi persamaan khusus

$$y^5 + 3y - \frac{1}{2}x^2 = 4$$

Latihan:
Tentukan selesaian umum PD berikut

1. $y' = \frac{x^2}{1-y^2}$
2. $y' = \frac{x^2}{y}$
3. $y' = -6xy$
4. $y' = x + xy$
5. $y' = \frac{y\cos x}{1+2y^2}$
6. $y' = 2x\sqrt{y-1}$
7. $y' = (cos^2 x)(cos^2 2y)$
8. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
9. $y' = 2e^{-y}cosx$
10. $y' = 2(xy + y)$
11. $x(y^2 + 2)dx + y(x^2 + 1)dy = 0$
12. $(y^2 + 1)dx + (x^2 + 1)dy = 0$

Persamaan Diferensial Peubah Terpisah (Homogen);

Pertemuan V

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde 1 akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linier,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

Persamaan Homogen substitusi y = *vx*

- Tinjau persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x}$$

- Persamaan di atas tidak dapat diselesaikan dengan cara memisahkan variabelnya. Dalam hal ini kita lakukan substitusi $y = vx$, dengan v adalah fungsi x. Sehingga penyelesaiannya:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x}$$

- dari $y = vx$ dideferensialkan menjadi

$$dy = vdx + xdv \leftrightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Sehingga $\frac{x+3y}{2x} = \frac{1+3v}{2}$

Persamaannya menjadi

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + 3v}{2} - v = \frac{1 + v}{2}$$

$$\frac{2}{1 + v}dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{2x}$$

Kedua ruas diintegralkan menjadi

$$\int \frac{2}{1+v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$2\ln(1+v) = \ln x + c$$

$$(1+v)^2 = c.x$$

Subtitusi $v = \frac{y}{x}$ didapat

$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 = c.x$ atau $(x+y)^2 = c.x^3$

Latihan Soal:

Selesaikan persamaan diferensial berikut dengan substitusi *y* = *vx*

1. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0$
2. $-y\,dx + \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dy = 0$
3. $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

Persamaan Diferensial Metode Eksak;

Pertemuan VI

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde I akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linier,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

Persamaan Diferensial Eksak

Bentuk Umum

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

dikatakan eksak jika terdapat fungsi $Q(x,y)$, sedemikian sehingga

$\frac{\delta Q}{\delta x} = M(x,y)$ dan $\frac{\delta Q}{\delta y} = N(x,y)$

Persamaan Diferensial Eksak

Dengan mengingat diferensial total dari fungsi $Q(x, y)$disimpulkan bahwa persamaan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak jika dan hanya jika $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$

Langkah Menyelesaikan PD Eksak

1) Langkah 1. Tuliskan PD dalam bentuk diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$
2) Langkah 2. Uji ke-eksak-an PD: $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$
3) Langkah 3. Jika eksak, integralkan *M* terhadap *x* atau *N* terhadap *y*.

   Misal dipilih *M*, maka :

$$\mathrm{Q}(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

Langkah Menyelesaikan PD Eksak

4) Langkah 4. Turunkan Q terhadap y dan samakan hasilnya dengan $N(x, y)$.

$$\mathrm{Q}(x, y) = \frac{\delta}{\delta y}\left(\int M(x, y)dx\right) + g'(y)$$

5) Langkah 5. Integralkan $g'(\ y)$ untuk memperoleh $g(y)$
6) Langkah 6. Tuliskan penyelesaian umum dalam bentuk implisit: $Q(x, y) = \ C$
7) Langkah 7. Tentukan C jika diberikan kondisi awal tertentu.

Contoh: Selesaikan PD

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-2y}{y^2-2x}; y(0) = 3$$

- ubah bentuk

$$(x-2y)dx + (y^2-2x)dy = 0$$

- uji ke-eksakan $\frac{\delta M}{\delta y} = -2;\ \ dan\ \frac{\delta N}{\delta x} = -2$
- Misal dipilih *M* untuk diintegralkan, maka :

$$\mathrm{Q}(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$

$$= \int (x-2y)dx + g(y)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2xy + g(y)$$

- Menyamakan turunan $Q(x, y)$ terhadap y dengan $N(x, y)$:

$$\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{1}{2}x^2 - 2xy + g(y)\right) = y^2 - 2x$$

$$0 - 2x + g'(y) = y^2 - 2x$$

$$g'(y) = y^2$$

- Integralkan $g'(\,y)$, diperoleh

$$g(\,\mathrm{y}) = \frac{1}{3}y^3$$

- Penyelesaian umum dalam bentuk implisit $Q(x, y) = c$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = c$$

- Dengan kondisi awal $y(0) = 3$, diperoleh $C = 9$, sehingga penyelesaian khususnya adalah $\frac{1}{2}x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 = 9$

Latihan
Uji Ke-esakan PD dan selesaikan

1. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+2y}{y^2+2x}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2+4xy}{2x^2+2y}, y(0) = 3$
3. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos y}{x \sin y - y^2}$
5. $(xe^y - e^{2y})dy - (e^y + x)dx = 0$
6. $(e^x siny - 2ysinx)dx + (e^x cosy + 2cosx)dy = 0$
7. $(x^2 - 2xy)dy - (y^2 - 2xy + 1)dx = 0$
8. Tentukan N(x,y)sehingga $(xy - y^2 + x)dx + N(x,y)dy = 0$ eksak!
9. Tentukan M(x,y) shg $M(x,y)dx + (x \sin y + \ln y - ye^x)\, dy = 0$ eksak!

Persamaan Diferensial Metode Faktor Integrasi;

Pertemuan VII

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde 1 akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linier,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

Persamaan Diferensial Eksak

Bentuk Umum

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

dikatakan eksak jika terdapat fungsi $\mathrm{Q}(x, y)$, sedemikian sehingga

$\frac{\delta Q}{\delta x} = M(x, y)$ dan $\frac{\delta Q}{\delta y} = N(x, y)$

Dengan mengingat diferensial total dari fungsi $\mathrm{Q}(x, y)$disimpulkan bahwa persamaan $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ eksak jika dan hanya jika $\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x}$

Persamaan Diferensial Tidak Eksak

Jika suatu persamaan Diferensial ordo satu berbentuk

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Mempunyai sifat $\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}$ maka PD tersebut disebut PD Tak-Eksak.

Suatu PD tak eksak dapat diubah ke PD eksak dengan mengalikan persamaan dengan suatu faktor yang tepat, yang disebut **faktor pengintegralan** (*integrating factor*) dengan simbol $\mu(x,y)$.

Menentukan Faktor Integrasi

Jika $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tak eksak dan $\mu(x,y)$faktor integrasi, maka $\mu(x,y)\ M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$

adalah PD eksak, sehingga $\frac{\delta \mu M}{\delta y} = \frac{\delta \mu N}{\delta x}$ atau

$$\frac{\delta\mu}{\delta y}M + \frac{\delta M}{\delta y}\mu = \frac{\delta\mu}{\delta x}N + \frac{\delta N}{\delta x}\mu$$

$$\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)\mu = \frac{\delta\mu}{\delta x}N - \frac{\delta\mu}{\delta y}M$$

$$\mu = -\frac{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y}M - \frac{\delta\mu}{\delta x}N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}$$

Kasus 1

$\mu(x, y) = \mu(x)$ faktor integrasi hanya fungsi x

$$\mu = -\frac{\left(\frac{\delta\mu}{\delta y} M - \frac{\delta\mu}{\delta x} N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)} = -\frac{\left(0 - \frac{\delta\mu}{\delta x} N\right)}{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}$$

$$\leftrightarrow \frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x} = \frac{N}{\mu}\frac{\delta\mu}{\delta x} \leftrightarrow \frac{1}{\mu}\delta x = \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N} dx$$

$$\leftrightarrow \ln\mu = \int \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N} dx$$

$$\leftrightarrow \mu = e^{\int \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N} dx}$$

Kasus 2

$\mu(x, y) = \mu(y)$ faktor integrasi hanya fungsi y

Dengan analisis seperti kasus 1 maka diperoleh

$$\mu = e^{\int \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{-M} dy}$$

Contoh: Uji Keeksakan PD

$$x\,dy + (2y - xe^{x})dx = 0$$

Penyelesaian

$M(x,y) = (2y - xe^{x})$ dan $N(x,y) = x$

$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta(2y - xe^{x})}{\delta y} = 2$ dan $\frac{\delta N}{\delta x} = 1$ jadi

$$\frac{\delta M}{\delta y} \neq \frac{\delta N}{\delta x}\ (tidak\ eksak)$$

Faktor integrasi

$\frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N} = \frac{2-1}{x} = \frac{1}{x}$ sehigga

$$\mu = e^{\int \frac{\left(\frac{\delta M}{\delta y} - \frac{\delta N}{\delta x}\right)}{N} dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

Contoh: Uji Keeksakan PD

$$x\,dy + (2y - xe^{x})dx = 0$$

Diperoleh $\mu = x$ sehingga dikalikan ke persamaan diferensial menjadi

$$x^2\,dy + (2xy - x^2e^{x})dx = 0$$

Diujian keeksakan

$$\frac{\delta M}{\delta y} = \frac{\delta N}{\delta x} = 2x$$

Latihan

Tunjukkan bahwa PD berikut tak eksak, kemudian tentukan faktor integrasi serta uji ke-eksakannya, selanjutnya dapatkan solusi umum PD!

1. $2xy\,dy + (3x + 2y^2)dx = 0$
2. $(3 - 2y)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
3. $(y - 2x^3)dx - x(1 - xy)dy = 0$

Persamaan Diferensial Linier Ordo Satu Bentuk $y' + Py = Q$

Pertemuan VIII

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde 1 akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linier,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

PD Linier Ordo Satu
Bentuk $\boldsymbol{y' + Py = Q}$

- Pada PD yang berbentuk $y' + Py = Q$ atau $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ dengan P dan Q fungsi x atau konstanta.
- Penyelesaiannya dapat diperoleh dengan mengalikan kedua ruas dengan faktor integrasi $\boldsymbol{e^{\int P\,dx}}$

Contoh
selesaikan PD: $y' - y = x$

Penyelesaiannya: bisa diubah $\frac{dy}{dx} - y = x$

- dari pers. diperoleh P = -1 dan Q = x
- faktor integrasinya $e^{\int P dx} = e^{-x}$
- jika kedua ruas persamaan dikalikan dengan e^{-x} maka

$$e^{-x}\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = e^{-x}(x)$$

$$e^{-x}\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=e^{-x}(x)$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx}-e^{-x}(y)=e^{-x}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y)=e^{-x}x$$

$$d\left(e^{\int Pdx}y\right)=e^{\int Pdx}x$$

$$d\left(e^{\int Pdx}y\right)=e^{\int Pdx}Q$$

Sehingga penyelesaiannya

$$e^{-x}\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=e^{-x}(x)$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx}-e^{-x}(y)=e^{-x}(x)$$

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y)=e^{-x}x$$

ekuivalen

$$d\left(e^{\int Pdx}y\right)=e^{\int Pdx}x$$

$$d\left(e^{\int Pdx}y\right)=e^{\int Pdx}Q$$

Sehingga penyelesaiannya

$$\int d\left(e^{-x}y\right) = \int e^{-x}\,x dx$$

$$e^{-x}y = -e^{-x}.x + \int e^{-x}dx$$

$$e^{-x}y = -e^{-x}.x - e^{-x} + c$$

$$y = \frac{-e^{-x}.x - e^{-x} + c}{e^{-x}}$$

$$y = -x - 1 + c$$

Pelajarannya! $\frac{dy}{dx} - Py = x$

- jika faktor integrasi $e^{\int Pdx} = \mu$ maka PD ordo satu dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dx}(\mu . y) = \mu . x$$

- Penyelesaiannya menjadi

$$\mu . y = \int \mu . x \, dx + c$$

Atau

$$e^{\int Pdx} . y = \int e^{\int Pdx} . Q \, dx + c$$

Latihan
Selesaikan PD linier berikut!

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
2. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^2$
3. $\frac{dy}{dx} - y = e^{3x}$
4. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
5. $x\frac{dy}{dx} + y = 2x$

Latihan

Tunjukkan bahwa PD berikut tak eksak, kemudian tentukan faktor integrasi serta uji ke-eksakannya, selanjutnya dapatkan solusi umum PD!

1. $2xy\,dy + (3x + 2y^2)dx = 0$
2. $(3 - 2y)dx + (x^2 - 1)dy = 0$
3. $(y - 2x^3)dx - x(1 - xy)dy = 0$

Persamaan Diferensial Bernaulli $y' + Py = Qy^n$

Pertemuan IX

Sidiq Aulia Rahman

Pengantar

Materi PD Orde 1 akan diuraikan dimulai dengan :

1. PD Peubah Terpisah,
2. PD Peubah Terpisah (Homogen),
3. PD koefisien Linier,
4. PD Eksak dan Faktor Integrasi,
5. PD Linear Orde satu dan
6. PD Bernaulli

PD Bernaulli

$$\boldsymbol{y' + Py = Qy^n}$$

- Pada PD yang berbentuk $y' + Py = Qy^n$ atau $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ dengan P dan Q fungsi x atau konstanta diselesaikan dengan cara:

1) Membagi kedua ruas dengan y^n

sehingga $y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q$

2) Misalkan $z = y^{1-n}$ serhingga

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{1-n})}{dx} \rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dz}$$

Supaya suku pertama $\frac{dz}{dx}$ maka dikali $(1-n)$ didapat

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)Py^{1-n} = (1-n)Q$$

$$\frac{dz}{dx} + P_1 . z = Q_1 \ (PD\ Linier)$$

Dengan P_1, Q_1 fungsi x atau konstanta. Persamaan terakhir dapat diselesaikan dengan faktor integrasi, dengan mensubtitusi $z = y^{1-n}$ kita dapatkan y

Contoh

selesaikan PD: $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2$

- Kedua ruas dibagi y^2 menjadi

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = x$$

- Misalkan $z = y^{1-n}$, $\mathrm{n} = 2$ sehingga $z = y^{-1}$ dan $\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$
- supaya suku pertama $\frac{dz}{dx}$, maka dikali (-1) diperoleh

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = -x$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x \quad (PD\ Linier)$$

$$\frac{dz}{dx} - \frac{z}{x} = -x \quad (PD\ Linier)$$

- faktor integrasi $e^{\int P dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$
- bentuk umum PD linier didapat

$$\mu . y = \int e^{\int P dx} Q dx + c$$

$$\frac{1}{x} z = \int \frac{1}{x}(-x) dx + c \ \rightarrow \frac{z}{x} = -x + c$$

$z = cx - x^2$ karena $z = y^{-1}$ maka

$y^{-1} = cx - x^2$ atau $y = (cx - x^2)^{-1}$

Latihan
Selesaikan PD Bernaulli berikut!

1. $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$
2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x y^4$
3. $2\frac{dy}{dx} + y = (x - 1)y^3$

Persamaan Diferensial Linear Ordo Dua

Pertemuan X

Sidiq Aulia Rahman

Pendahuluan

- Persamaan diferensial ordo dua penyelesaianya dapat dinyatakan dalam fungsi sederhana yakni persamaan diferensial linier koefisien konstan.
- materi bahasan bab ini:
  - PD Linier Homogen Ordo Dua
  - PD Linier Tak Homogen Ordo Dua
    - Metode Koefisien Tak Tentu
    - Metode Variasi Parameter

PD Linier Homogen Ordo Dua

- bentuk umum $y'' + py' + qy = f(x)$ dengan p, q konstanta
- dengan fungsi f kontinu pada daerah definisinya jika fungsi $f(x)$ identik dengan nol, disebut persamaan homogen, tetapi jika $f(x)$ tidak identik dengan nol, maka disebut tak homogen

PD linier ordo dua koefisien konstan

- bentuk umumnya $y'' + py' + qy = 0$ dapat ditulis dalam bentuk

$(D^2 + pD + q)y = 0$ dengan

$D = \frac{d}{dx}$ dan $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, D disebut operator diferensial

Bentuk kuadrat dalam D, yang dalam sistem bilangan kompleks dapat diuraikan

$$(D^2 + pD + q) = (D - r_1)(D - r_2)$$

Dapat ditulis

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

Dengan r_1, r_2 adalah akar persamaan kuadrat $r^2 + pr + q = 0$ (Persamaan Karakteristik)

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0$$

- misal $v = (D - r_2)y$

dapat ditulis $(D - r_1)v = 0$ atau

$\frac{dv}{dx} - r_1 v = 0$ (PD ordo satu) dapat diselesaikan dengan metode peubah terpisah menjadi $v = ce^{r_1 x}$

Disubtitusikan ke persamaan pemisalan

$v = (D - r_2)y = ce^{r_1 x}$ menjadi

$Dy - r_2 y = ce^{r_1 x}$(PD linier ordo satu)

$Dy - r_2 y = ce^{r_1 x}$

- dapat diubah $\frac{dy}{dx} - r_2 y = ce^{r_1 x}$
- PD linier ordo satu dengan faktor pengintegralan $\mu(x) = \int e^{-r_2 dx} = e^{-r_2 x}$
- sehingga selesaiannya

$$\mu . y = \int \mu . Q dx + c$$

$y = e^{r_2 x}[\int e^{-r_2 x} ce^{r_1 x} dx + c]$ atau

$$y = e^{r_2 x}\left[c \int e^{(r_1 - r_2)x} dx + c\right]$$

$$y = e^{r_2 x}\left[c\int e^{(r_1 - r_2)x}dx + c\right]$$

Ada 3 kasus

1. $r_1\ dan\ r_2$ berbeda $(D > 0)$

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

2. $r_1\ dan\ r_2$ sama $(D = 0)$

$$\boldsymbol{y = (c_1 x + c_2)e^{rx}}$$

3. $r_1\ dan\ r_2$ bilangan kompleks $(D < 0)$

$r_1 = p + qi$ dan $r_2 = p - qi$

Rumus Euler untuk bilangan kompleks

$$\boldsymbol{y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)}$$

Ringkasan

$$y'' + py' + qy = 0$$

$y = e^{rx}$

$y' = r.e^{rx}$

$y'' = r^2.e^{rx}$

$$r^2.e^{rx} + p(r.e^{rx}) + q(e^{rx}) = 0$$

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0$$

$$e^{rx} \neq 0\,,$$

$(r^2 + pr + q)$persamaan karakteristik

contoh

selesaian umum PD Linier ordo dua

$y'' - 2y' - 15y = 0$

Persamaan karakteristiknya

$$r^2 - 2r - 15 = 0$$

$$(r-5)(r+3) = 0$$

$r_1 = 5$ dan $r_2 = -3$ catatan $(r_1 > r_2)$

Dikarenakan akar berbeda

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}}$$

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}}$$

Latihan

Tentukan selesaian umum PD Linier ordo dua berikut

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$
2. $y'' + 8y' + 16y = 0$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0$
4. $y'' - 4y' + 13y = 0$
5. $y'' - 6y' + 34y = 0$